



TITLE:

場の量子論におけるHamiltonianの定義 (ハミルトニアンの定義とスペクトル)

AUTHOR(S):

麦林, 布道

CITATION:

麦林, 布道. 場の量子論におけるHamiltonianの定義 (ハミルトニアンの定義とスペクトル). 数理解析研究所講究録 1971, 118: 1-12

ISSUE DATE:

1971-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106460>

RIGHT:

場の量子論における Hamiltonian の定義

神戸大学理学部 麦林布道

「散乱理論とその周辺」研究会において、江沢さんが自由度無限大の系の量子力学としての場の量子論^{*}の基本的なことを述べておられる。ここでは、本研究会の主題に則して QFT の Hamiltonian の Fock space における定義について最近に使っていること、ならびにそれに関連して J. Glimm と K. Hepp の conjecture をお話しして introductory talk としたい。

式を出さなければ簡単にするため、中性スカラー場に限る。他の場が共存する場合への拡張可能性については後で示す。

$x \in \mathbb{R}^s$ とし、 $t=0$ における field operator を

$$(1) \quad \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int \frac{d^s k}{\sqrt{2\omega}} [a(-k) + a^*(k)] e^{-ikx}$$

の如く展開する。 kx は \mathbb{R}^s における通常の内積、また

$$\omega(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}, \quad m \text{ は粒子の質量である。}$$

^{*} 以下 QFT (quantum field theory) と略記する。

$$[a(k), a^*(k')] = \delta^s(k-k'),$$

$$[a(k), a(k')] = [a^*(k), a^*(k')] = 0.$$

$$\phi(f) = \int \phi(x) f(x) d^s x, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s), \quad \text{is Fock space } \mathcal{F}$$

of s.a. operator, Fock vacuum is Ω_0 . and, $\prod_{i=1}^n \phi(f_i) \Omega_0$,
 $n < \infty$, $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$, and \mathcal{D} is the linear combination of the set (which is
 \mathcal{D} is denoted) is \mathcal{F} is dense in \mathcal{F} .

free Hamiltonian is

$$(2) \quad H_0 = \int \omega(k) a^*(k) a(k) d^s k$$

with which, \mathcal{D} is essential s.a. is shown. $\lambda(\phi^n)_{s+1}$
 theory is, interaction is completely formal in ϕ of n terms of ϕ .

$$(3) \quad V = \lambda \int : \phi^n(x) : g(x) d^s x$$

is written as follows. $::$ double colon is Wick's theorem,

$g(x)$ is space cutoff is a smooth function. (3)

is Fourier transform is

$$V = \sum_{p+q=n} V_{pq}$$

$$(4) \quad V_{pq} = \int v_{pq}(k_1, \dots, k_n) a^*(k_1) \dots a^*(k_p) a(-k_{p+1}) \dots a(-k_n) d^s k_1 \dots d^s k_n$$

$v_{\mathbf{p}\mathbf{b}}(k_1, \dots, k_n)$ は本質的に $g(x)$ の Fourier 変換と,

$\phi(x)$ の展開 (1) に現われる因子 $(2\omega_i)^{-1/2}$ との積である。

V は一般に \mathbb{R}^n 上の operator として定義できるわけではない。

V をどう考え, total Hamiltonian をどのように定義するの

が QFT の Hilbert space formulation の一つの課題である。

周知の van Hove - Miyatake のモデル¹⁾ は $n=1, s=3$

の場合に当る。その Hamiltonian の定義に関しては次のように

が利っている²⁾。 $v_{\mathbf{n}\mathbf{o}}$ をかんたんに v_0 と書く。

$$(a) \quad D(H_{\text{ren}}) = D(H_0) \quad \text{iff} \quad v_0 \in L_2$$

このとき, $D(V) \cap D(H_0)$ であり, T. Kato の意味での

type (A) の regular perturbation の理論^{*}が適用できる。即ち

$$(5) \quad \|V\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\| \quad (a < 1) \quad \text{for } \psi \in D(H_0)$$

そして operator として $H_{\text{ren}} = H_0 + V + C$ と書ける。ここで,

C は vacuum energy の shift を与える const. operator である

の場合有限。

$$(b) \quad D(H_{\text{ren}}^{1/2}) = D(H_0^{1/2}) \quad \text{iff} \quad v_0/\omega^{1/2} \in L_2$$

このとき, V は operator ではなく, bilinear form として定義

できなくとも, regular perturbation の type (B) の条件^{**}

* Ref. 3), p. 377

** Ref. 3), p. 398

$$(b) \quad |(\psi, V\psi)| \leq a(\psi, H_0\psi) + b(\psi, \psi) \quad (a < 1) \quad \text{for } \psi \in D(H_0^{1/2})$$

を仮定して、 $(\psi, (H_0 + V + C)\psi)$ を bilinear form とする。この s.a. operator χ として H_{ren} が定義できる。尚 $D(H_{ren}) \cap D(H_0) = \{0\}$ であり、勿論 operator χ として $H_{ren} = H_0 + V + C$ とは書けない。この場合 C は有限 κ となる。

$$(c) \quad D(H_{ren}) \subset \mathcal{F} \quad \text{iff} \quad v_0/\omega \in L_2$$

このとき、vacuum shift は ∞ κ となるが、これを引いた後の H_{ren} は \mathcal{F} 上で定義出来る。(H_0 と H_{ren} を結ぶユニタリ変換が与えられる)。 $D(H_{ren}^{1/2}) \cap D(H_0^{1/2}) = \{0\}$

これらの結果は類似の相互作用の場合に一般化できる。ここで、Glimm⁴⁾ と Hepp⁵⁾ は次の如き conjecture を述べている。相互作用 Hamiltonian の Wick monomial (4) をあて、 a, a^* は boson として、fermion としてまたは antifermion としてとる。更に

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \omega(k_i)$$

を定義する。

$$(a') \quad D(H_{ren}) \subset D(H_0) \quad \text{iff} \quad v_0 \in L_2$$

$D(H_{ren}) = D(V) \cap D(H_0)$ は \mathcal{F} 上で dense. となる。 $H_{ren} = H_0 + V + C$ と書ける。 C は有限の vacuum shift.

$$(b') \quad D(H_{\text{ren}}^{1/2}) \subset D(H_0^{1/2}) \quad \text{if} \quad v_0/\gamma \in L_2.$$

$H_{\text{ren}} = H_0 + V + C$ is bilinear form の意味を解せらる。

C は矢張り有限, $D(H_{\text{ren}}) \cap D(H_0) = \{0\}$

$$(c') \quad D(H_{\text{ren}}) \subset \mathcal{F} \quad \text{if} \quad v_0/\gamma \in L_2.$$

この時 C は無限大, $D(H_{\text{ren}}^{1/2}) \cap D(H_0^{1/2}) = \{0\}$

この conjecture は既にいくつかのモデルについて成立つ

ことが確認されている。しかし、その何れも必ずしも

superrenormalizable なモデルである。即ち C の他の counter

term を λ の中級数で求める、ある次数以降は有限な答を与

える。 λ の dimension $[\lambda] = L^d$ の $d < 0$ の時 superrenorma-

lizable であるという判定条件はよく知られている。

いくつかの理論について、上記の条件がどの段階まで成

立っているか、また d 及び superrenormalizability の程度はど

うか、を表にすると次のようになる。

	(a')	(b')	(c')	d	
$(\phi^{2n})_2$				-2	すべての 次数で有限
$(\phi^2)_3$	X			-2	
$(\phi^2)_4$	X	X		-2	
$(\phi^2)_5$	X	X	X	-2	
$(\phi^4)_3$	X	X	X	-1	4次以上 で有限

$(\bar{\psi}\psi)_2$				-1	3次以上で有限
$(\bar{\psi}\psi)_3$				$-\frac{1}{2}$	7次以上で有限

この内, $\lambda(\phi^4)_2$ 及び $\lambda(\bar{\psi}\psi)_2$ は最近 J. Glimm と A. Jaffe
 によって精力的に調べられた。とくに $\lambda(\phi^4)_2$ では cutoff
 Hamiltonian の self-adjointness を証明するのに対して "singular
 perturbation" の理論を展開し, axiomatic QFT, algebraic QFT
 において既に開発されていた手法を駆使して cutoff を取り除
 き, QFT の基本的要請を満たす理論をつくりあげることに
 成功した (constructive QFT)。その過程の主要な点は, 関根さん,
 池辺さん, 荒木さんのお話に出てくる。ここでは constructive
 QFT の最近の論文を網羅して参考に資するに止めた。

文 献

- [1] L. van Hove, Physica 18 (1952), 145. O. Miyatake, J. Inst. Polytech.
Osaka City Univ. 2A (1952), 89, 3A (1952), 145.
- [2] H. Ezawa, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 545. Y. Kato and N. Mugibayashi,
Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 409.
- [3] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*; Springer, 1966
- [4] J. Glimm, Varenna Lectures, Course 45 (1968), 97-119.
- [5] K. Hepp, *Théorie de la Renormalisation*, Springer, 1969.

Constructive Quantum Field Theory

1970 July

Lectures (including Surveys)

- [G1] J. Glimm: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 97-119
Models for QFT
- [G2] J. Glimm: Advances in Math. 3 (1969), 101-124
The foundations of QFT
- [J1] A. M. Jaffe: *Contemporary Physics* Vol.2 (1968), pp. 463-470
Progress in constructive field theory
- [J2] A. M. Jaffe: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 120-151
Constructing the $\lambda(\phi^4)_2$ theory
- [J3] A. M. Jaffe: RMP 41 (1969), 576-580
Whither axiomatic field theory ?
- [K1] J. R. Klauder: Acta Phys. Austr. Suppl. 6 (1969), 167-214
Hamiltonian approach to QFT

Announcements

- [GJ1] J. Glimm and A. Jaffe: PRL 23 (1969), 1326
A model of Yukawa QFT
- [GJ2] J. Glimm and A. Jaffe: Bull. AMS 76 (1970), 407-410
Rigorous QFT models

Originals

- [CJ1] J. T. Cannon and A. M. Jaffe: Preprint
Lorentz covariance of the $\lambda(\phi^4)_2$ QFT
 Corresponding theory of bounded observables satisfies all the Haag-Kastler axioms. The Poincaré group is represented by *-automorphisms of the C^* algebra, the norm closure of $U_B \mathcal{O}(B)$.

- [E1] J.-P. Eckmann: Thesis, Genève (1970)
Hamiltonians of persistent interactions
 $(\phi_b^+ \phi_b^- P(\phi_a))$ Hamiltonians with momentum cutoff self-adjoint for $\deg P = 1, 2, 4$ and $s = 1$. Semibounded without cutoff for $\deg P = 2, s = 1$. The model $\deg P = 1, s = 3$ has an infinite mass renormalization. Self-adjointness of the Hamiltonians with no cutoff is shown by summing the Born series.
- [F1] P. Federbush: JMP 10 (1969), 50-52
Partially alternative derivation of a result of Nelson
 Proof of Nelson's result [N1] avoiding the use of functional integration.
- [G3] A. Galindo: Proc. NAS 48 (1962), 1128-1134
On a class of perturbation in QFT
 $(\phi^n)_4, n \geq 3$. Expectation values of H_{tot} can be arbitrarily negative.
- [G4] M. Guenin: CMP 3 (1966), 120-132
On the interaction picture
 Escape from Haag's theorem - space cutoff, yet the Heisenberg field satisfies the correct equation of motion in a diamond-like region of space-time.
- [G5] J. Glimm: CMP 5 (1967), 343-386
Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions I
 $(\bar{\psi}\psi)_2$ with space cutoff. H_{ren} defined as a bilinear form in Fock space.
- [G6] J. Glimm: CMP 6 (1967), 61-76
Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions II
 H_{ren} positive definite. Schrödinger equation for H_{ren} can be solved.
- [G7] J. Glimm: CMP 8 (1968), 12-25
Boson fields with nonlinear self-interaction in two dimensions
 $(P(\phi))_2$, even degree, positive leading coefficient with space cutoff. H_{tot} bounded from below due to the Feynman-Kac formula.
- [G8] J. Glimm: CMP 10 (1968), 1-47
Boson fields with ϕ^4 : interaction in three dimensions

- [J4] A. Jaffe: CMP 1 (1965), 127-149
Divergence of perturbation theory for bosons
 $(\sum a_j \phi^j)_2$, finite sum from $j = 3$, $a_j \geq 0$. Perturbation of all orders finite, but the series diverges. Green's function not analytic in λ at $\lambda = 0$.
- [J5] A. Jaffe: JMP 7 (1966), 1250-1255
Wick polynomials at a fixed time
 $(P(\phi))_2$ with space cutoff. Smearing in space is sufficient to prove H_{tot} be densely defined symmetric by the use of Weinberg's asymptotic theorem.
- [JLW1] A. Jaffe, O. Lanford and A. S. Wightman: CMP 15 (1969), 47-68
A general class of cutoff model fields
Existence of Heisenberg fields and Wightman functions. The Kato perturbation is applicable thanks to cutoff dominant boson self-interaction.
- [JP1] A. Jaffe and R. T. Powers: CMP 7 (1968), 218-221
Infinite volume limit of a $\lambda \phi^4$ field theory
 $(\phi^4)_4$ Wightman functional, with infinite volume, finite momentum cutoff. The infinite volume limit not given by a density matrix in Fock space.
- [N1] E. Nelson: *Mathematical Theory of Elementary Particles* (1966), pp. 69-74
A quartic interaction in two dimensions
 $(\phi^4)_2$ in a periodic box. H bounded from below.
- [O1] K. Osterwalder: Preprint
Boson fields with $\lambda \phi^3$ interaction in two, three and four dimensions
 $(\phi^3)_4$ can be renormalized.
- [P1] S. Parrott: CMP 13 (1969), 68-72
Uniqueness of the Hamiltonian in QFT
Remarks on the uniqueness of self-adjoint extension, referring to [G5], [G6], [G8].
- [P2] R. T. Powers: CMP 4 (1967), 145-156
Absence of interaction as a consequence of good ultraviolet behavior in the case of a local Fermi field
Under a certain regularity condition slightly stronger than the finite mass renorm., ICAR theorem asserts that a local relativistic Fermi field must be free.

H_{ren} densely defined symmetric (positivity?). Infinite vacuum energy, mass renorm. and wave function renorm. $(\phi^4)_3$ with space cutoff.

[GJ3] J. Glimm and A. Jaffe: CMP 11 (1968), 9-18

A Yukawa interaction in infinite volume

$(\bar{\psi}\psi\phi)_4$ with momentum cutoff on ψ , but without space cutoff. Existence of Heisenberg fields.

[GJ4] J. Glimm and A. Jaffe: PR 176 (1968), 1945-1951

A $\lambda\phi^4$ QFT without cutoffs I

$(\phi^4)_2$ with space cutoff. $H_{\text{tot}}(g)$ defined as a self-adjoint operator in Fock space. $H_{\text{tot}}(g)$ proved self-adjoint by singular perturbation. Heisenberg picture dynamics discussed à la [G4]. The theory is local. Formally, Lorentz covariant; non-trivial S-matrix.

[GJ5] J. Glimm and A. Jaffe: Ann. Math. 91 (1970), 362-401

The $\lambda(\phi^4)_2$ QFT without cutoffs II. The field operators and the approximate vacuum

Existence of a unique vacuum Ω_g : $H(g)\Omega_g = E_g\Omega_g$. $H(g)$ compact in $[E_g, E_g + m_0 - \varepsilon]$. $\mathcal{U}(B)$ satisfies the Haag-Kastler axioms except the Lorentz covariance (the exception is removed in [CJ1]).

[GJ6] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

The $\lambda(\phi^4)_2$ QFT without cutoffs III. The physical vacuum

The limit $g(x/n)$ tending n to infinity in the states ω_g . GNS construction then getting the physical space.

[GJ7] J. Glimm and A. Jaffe: JMP 10 (1969), 2213-2214

Infinite renormalization of the Hamiltonian is necessary

Unrenormalized H unbounded from below whenever first-order perturbation theory indicates that this is true.

[GJ8] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

Self-adjointness of the Yukawa₂ Hamiltonian

$(\bar{\psi}\psi)_2$. Momentum cutoff makes $\delta m^2(g,K)$, $E(g,K)$ finite. To renormalize as required by perturbation theory. $H(g,K) \rightarrow H(g)$ as $K \rightarrow \infty$, in the sense of resolvent. $H(g)$ has a vacuum.

[GJ9] J. Glimm and A. Jaffe: Preprint

The Yukawa₂ QFT without cutoffs

Heisenberg picture dynamics. All cutoffs are removed in the field operators. The fields are local and formally Lorentz covariant.

- [R1] L. Rosen: CMP 16 (1970), 157-183
A $\lambda\phi^{2n}$ field theory without cutoffs
 $(P(\phi))_2$. Remove box, momentum and space cutoffs. H , positive self-adjoint, has a physical vacuum.
- [SE1] K. Sinha and G. G. Emch: Bull. APS 14 (1969), 86
Adaptation of Powers' no-interaction theorem to Bose field
 Space dimension $n = 3$.

Mathematical Tools

Feynman-Kac Formula

M. Kac: *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Intersci. 1959

J. Glimm: Varenna Lectures, Course 45 (1968), pp. 227-233

Integration in function space

Trotter Product Formula

H. F. Trotter: Pacific J. Math. 8 (1958), 887-919

Approximation of semi-groups of operators

H. F. Trotter: Proc. AMS 10 (1959), 545-551

On the product of semi-groups of operators

I. Segal: Proc. NAS 57 (1967), 1178-1183

Note towards the construction of nonlinear relativistic quantum fields I. The Hamiltonian in two dimensions as the generator of a C^* automorphism group

Analytic Vector

E. Nelson: Ann. Math. 70 (1959), 572-615

Analytic vectors

H. J. Borchers and W. Zimmermann: NC 31 (1964), 1047-1059

On the self-adjointness of field operators

V. P. Gachok: DAN 178 (1968), 1033-1035

A description of all self-adjoint extensions of the field operators

Singular Perturbation

J. Glimm and A. Jaffe: CPAM 22 (1969), 401-414

Singular perturbations of self-adjoint operators

Regular Perturbation

T. Kato: *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer, 1966

Weinberg's Asymptotic Theorem

S. Weinberg: PR 118 (1960), 838-849

High energy behavior in QFT

GNS Construction

R. F. Streater and A. S. Wightman: *PCT Spin [&] and Statistics and All That*, Benjamin, 1964, P. 117 ff.

M. A. Naimark: *Normed Rings*, Noordhoff, 1959, Chap. IV.